Ensaio Sobre Primos Gêmeos

A intenção deste ensaio não é tentar provar que os primos gêmeos são infinitos. Apenas gostaríamos de acrescentar outro caminho para que demais interessados na Teoria dos Números possam ajudar na elucidação deste mistério.

A conjectura de Polignac afirma que cada natural par é igual à diferença de dois primos; mas esta conjectura, ao que parece, ainda não foi provada. Entretanto, nós observamos haver certa correlação daquela tese com os fundamentos de nosso estudo anterior, como proposto em **"Goldbach - Nova Conjectura"**, que conduziu a esta monografia, sobre primos gêmeos.

Inicialmente vamos resumir a proposta equivalente à conjectura de Goldbach, que pode ser examinada em detalhes em http://www.apex.eti.br.

Todos naturais > 1 podem ser representados pela média de dois primos **p** e **q** equidistantes de um natural **n**, através de um índex inteiro **k**, tal que:

$\mathbf{n = (p + q) \div 2}$, sendo

$\mathbf{p = n - k}$ e

$\mathbf{q = n + k}$.

Há uma simetria envolvendo **n** e ambos os primos **p** e **q** com amplitude

$3 \;\cdots\; \mathbf{n} \;\cdots\; 2 \times n - 3.$

Utilizaremos estes conceitos como alicerce para o estudo que apresentaremos sobre os **primos gêmeos**, os pares (g, h), com

$|h - g| = 2.$

Então temos, dentro de nossa formulação, para um determinado k_g:

$g = (p_g + q_g) \div 2,$

$p_g = (g - k_g),$

$q_g = (g + k_g);$

E para um determinado k_h:

$h = (p_h + q_h) \div 2,$

$p_h = (h - k_h),$

$q_h = (h + k_h).$

Por exemplo, seguem abaixo, algumas simetrias com o par (71, 73).

Par (g, h)	k	p	q
$g = 71$ $h = 73$	$k_g = 12$	$p_g = 59$	$q_g = 83$
	$k_h = 6$	$p_h = 67$	$q_h = 79$
	$k_g = 18$	$p_g = 53$	$q_g = 89$
	$k_h = 36$	$p_h = 37$	$q_h = 109$
	$k_g = 30$	$P_g = 41$	$q_g = 101$
	$k_h = 30$	$p_h = 43$	$q_h = 103$
	$k_g = 66$	$p_g = 5$	$q_g = 137$
	$k_h = 66$	$p_h = 7$	$q_h = 139$

De acordo com a conjectura, ambas as simetrias existem — individualmente, é claro — e, portanto o index **k** comporta-se de forma aleatória, como se vê nos exemplos

$k_g = 12$ e $k_h = 6$ ou

$k_g = 18$ e $k_h = 36$,

Não havendo conexão entre **g** e **h**.

Contudo, observamos a possibilidade de encontrar em cada par eleito para testes, casos em que o index **k** podia ser único, conforme se vê em outros dois exemplos, com

$k_g = k_h = 30$ ou

$k_g = k_h = 66$,

Havendo um vínculo entre **g** e **h**.

Esta condição — $\mathbf{k = k_g = k_h}$ — é a base deste estudo e estamos interessados apenas quando e se ela puder ocorrer; nesta situação:

Para qualquer par **(g, h)** podemos fazer

$(g - k) = p,$

$(g + k) = q,$

$(h - k) = p + 2,$

$(h + k) = q + 2.$

Portanto teremos:

$\mathbf{g = (p + q) \div 2}$ e

$\mathbf{h = [\,(p + 2) + (q + 2)\,] \div 2.}$

Procurando somente estas soluções tivemos algum sucesso com vários testes, o que nos induziu à teoria que segue e para distinguir os primos gêmeos em que $\mathbf{k_g \neq k_h}$ de outros em que $\mathbf{k_g = k_h}$ adotamos o seguinte conceito:

Primos Gêmeos Idênticos

São aqueles em que pelo menos um **k**, simultaneamente, atende um par **(g, h)**.

Portanto, dentre as simetrias dos exemplos anteriores, somente as seguintes identidades podem ser consideradas **primos gêmeos idênticos**:

<table>
<tr><th>Par (g, h)</th><th>k</th><th>p</th><th>q</th></tr>
<tr><td rowspan="4">$g = 71$
$h = 73$</td><td rowspan="2">30</td><td>$p_g = 41$</td><td>$q_g = 101$</td></tr>
<tr><td>$p_h = 43$</td><td>$q_h = 103$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">66</td><td>$p_g = 5$</td><td>$q_g = 137$</td></tr>
<tr><td>$p_h = 7$</td><td>$q_h = 139$</td></tr>
</table>

Em pesquisas iterativas com k, pudemos conduzir a simetria desta forma para primos gêmeos idênticos de pequena magnitude, e percebemos que foi possível obtê-los muitas vezes. Na *Tabela 1* temos o resultado dos primeiros pares.

Porem, como se vê na tabela, já iniciamos com dois pares onde não se pode obter simetria simultânea e, mais adiante, paramos no par (197, 199), também na mesma situação; ou seja, há casos impossíveis, se exigirmos que $\mathbf{n > k}$.

Neste momento faremos uma pausa em nosso estudo de primos gêmeos.

Vamos revisitar a conjectura original considerando o que ocorreria se pudéssemos expandir a simetria a valores negativos, ou seja, se tornássemos possível $\mathbf{k > n}$.

Sem restrição para **k**, observa-se, de imediato, simetria com amplitude infinita.

Analogamente, como na conjectura inicial, mantem-se as igualdades:

$\mathbf{n = (p + q) \div 2}$, sendo

$\mathbf{p = n - k}$ e

$\mathbf{q = n + k;}$

Onde são primos:

$\mathbf{|\,p\,|}$ e $\mathbf{q}$.

Observar que agora se podem obter **quaisquer** inteiros, e que, em particular:

$\mathbf{n = 0}$ com quaisquer primos, para $p + q = 0$;

$\mathbf{n = 1}$ com quaisquer pares de primos gêmeos;

$\mathbf{n < 0}$ é reflexo de $\mathbf{n > 0}$.

Tabela 1			
Pares	**k**	**p_g | p_h**	**q_g | q_h**
3 5	impossível		
5 7	impossível		
11 13	6	5	17
		7	19
17 19	12	5	29
		7	31
29 31	12	17	41
		19	43
41 43	30	11	71
		13	73
59 61	42	17	101
		19	103
71 73	30	41	101
		43	103
101 103	90	11	191
		13	193
107 109	90	17	197
		19	199
137 139	132	5	269
		7	271
149 151	42	107	191
		109	193
179 181	168	11	347
		13	349
191 193	90	101	281
		103	283
197 199	impossível		

A iteração de pesquisa pode ser obtida assim:

Para n par:

$$k = 1, 3, 5, \cdots \infty.$$

Para n impar:

$$k = 2, 4, 6, \cdots \infty.$$

Mas, vamos retornar ao nosso estudo, quando temos **primos gêmeos idênticos**.

A proposta pressupõe o vínculo entre primos gêmeos **g** e **h**, quando e se

$$\mathbf{k = k_g = k_h.}$$

E, excetuando o par (3, 5), temos que a iteração de k resume-se a:

$$k = 6, 12, 18, \cdots \infty$$

Até que surjam simultaneamente os primos:

$|p|$ e q;

$|p + 2|$ e $q + 2$.

Em resumo, temos:

$p_g = (g - k)$,

$q_g = (g + k)$,

$p_h = (g - k + 2)$ e

$q_h = (g + k + 2)$.

Sem restrição para **k** vamos ver aquelas identidades impossíveis de nossa tabela.

Pares	**k**	$\mathbf{p_g \mid p_h}$	$\mathbf{q_g \mid q_h}$
3	8	−5	11
5		−3	13
5	12	−7	17
7		−5	19
197	630	−433	827
199		−431	829

Interessante; é possível obter simetria.

Ademais, dentre o conjunto dos primeiros 1048576 primos ímpares temos:

3199 identidades representando os primos gêmeos idênticos (5, 7);

1669 identidades para (197, 199).

Curiosamente, mesmo com amplitude infinita, somente existe uma identidade para (3, 5), com $k = 8$, ficando como exercício para o leitor demonstrar o fato.

Dica: outros primos gêmeos são da forma $(6m - 1, 6m + 1)$ para algum natural m e, portanto, $g \equiv 2 \pmod 3$ e $h \equiv 1 \pmod 3$.

Para simetria de pares de primos gêmeos idênticos é necessário que, em geral, mais de uma coincidência ocorra para **g** e **h** — isoladamente — e de tal modo que em algum momento, para valores de **k** idênticos, encontramos primos equidistantes.

Para 12484 primeiros pares de primos gêmeos, e o mesmo conjunto de primos já citado, encontramos múltiplas identidades pretendidas, sendo que o menor número delas foi 1035 para (1302017, 1302019) e o maior valor foi 9468 para (180179, 180181).

Para ilustrar: dentre 2188 identidades para (41, 43) selecionamos alguns casos:

Par	**k**	$p_g \mid p_h$	$q_g \mid q_h$
41 43	30	+ 11	71
		+ 13	73
	18000	− 17959	18041
		− 17957	18043
	1008000	− 1007959	1008041
		− 1007957	1008043
	2070000	− 2069959	2070041
		− 2069957	2070043
	2163000	− 2162959	2163041
		− 2162957	2163043
	3894000	− 3893959	3894041
		− 3893957	3894043
	4092000	− 4091959	4092041
		− 4091957	4092043
	5010000	− 5009959	5010041
		− 5009957	5010043

Então parece que sendo a amplitude infinita, com infinitos números primos, é impossível determinar para cada par eleito quantas representações resultam em primos gêmeos idênticos, excluindo, como já mencionado, o par (3, 5), com uma única identidade.

Todavia, resta uma questão em aberto: será que todos os primos gêmeos podem ser identificados como idênticos? Ou seja: os conjuntos são equivalentes?

Então, reiterando, se

(g, h) são primos gêmeos idênticos, temos:

$g = (p + q) \div 2,$

$h = [(p + 2) + (q + 2)] \div 2$

E, como consequência, também são primos gêmeos os pares

(p, p + 2) e

(q, q + 2).

Portanto, nestas condições, cada par de primos gêmeos idênticos conduz a outros primos gêmeos, porem não necessariamente idênticos!

Mas explorando a questão anterior:

- Se pudéssemos garantir que todos os primos gêmeos também são idênticos

e

- Se houvesse um último par de primos gêmeos idênticos **(g_u, h_u)**.

Significaria que último par de primos gêmeos idênticos remeteria a outro par de primos gêmeos idênticos de magnitude superior, o que seria uma incongruência.

Conclusão: se assim fosse, forçosamente, seriam infinitos os números primos gêmeos.

P.S.

Uma ultima questão:

Sendo os primos gêmeos um caso particular da Conjectura de Polignac, seria possível expandir esta nova hipótese?

Eu acredito que sim!

Ivan Gondim Leichsenring
Apex Algoritmos [www.apex.eti.br]
ivan@ apex.eti.br
Barueri, São Paulo, Brasil.

Se você puder ajudar a tornar este texto mais legível, eu agradeço.